Eléments d'algèbre linéaire

$\mathbb{K}$ désigne un corps de caractéristique nulle.

I. Généralités

1°) Espace vectoriel

Déf : On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel tout ensemble E muni d'une loi de composition interne $+ : E \times E \to E$ et d'une loi externe : $. : \mathbb{K} \times E \to E$ vérifiant :
(1) $(E,+)$ est un groupe dont l'élément neutre est appelé vecteur nul,
(2) $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$, $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$, $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ et $1.x = x$.

Prop : Si $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$ alors par restriction du produit extérieur, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel est encore un $\mathbb{L}$-espace vectoriel.

Prop : Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois + et . définies par : $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ et $\lambda.(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.
De plus le vecteur nul de E est alors $0_E = (0_{E_1}, \ldots, 0_{E_n})$.

Prop : Si X désigne un ensemble et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel alors $\mathcal{F}(X,E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois + et . définies par : $\lambda.f : x \mapsto \lambda.f(x)$ et $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$.
De plus le vecteur nul de $E = \mathcal{F}(X,F)$ est la fonction nulle : $\tilde{0} : x \mapsto o$.

2°) Sous-espace vectoriel

a) définition

Déf : On appelle sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E toute partie F de E vérifiant :
(1) $F \neq \varnothing$,
(2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F$, $\lambda x + \mu y \in F$.

Prop : Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F + G = \{x + y / x \in F, y \in G\}$ et $F \cap G$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

b) sous-espaces vectoriels supplémentaires

Déf : Deux sous-espaces vectoriels F et G sont dits supplémentaires ssi $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$.

Théorème :
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E alors :
$\forall x \in E, \exists!(u,v) \in F \times G, x = u + v$.

c) sous-espace vectoriel engendré

Prop : Etant donnée une partie A de E, il existe un unique sous-espace vectoriel F de E contenant A et inclus dans tout sous-espace vectoriel de E contenant A.

Déf : Avec les notations précédentes, on dit que F est le sous-espace vectoriel engendré par A et on note $F = \text{Vect}\, A$.

Prop : $A \subset B \Rightarrow \text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$,
$\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

d) sous-espace affine

Déf : On appelle sous-espace affine passant $a \in E$ et dirigé par F sous-espace vectoriel E l'ensemble $a + F = \{a + x / x \in F\}$.

Prop : Si b appartient à un sous-espace affine V de direction F alors $V = b + F$.

Prop : L'intersection de deux sous-espaces affines de directions F et G est soit vide soit égale à un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

3°) Application linéaire

a) définition

Déf : On appelle application linéaire de E vers F toute application $f : E \to F$ vérifiant :
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.
On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F, c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'élément nul $\tilde{o}$.

b) propriétés

Prop : Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $f(0_E) = 0_F$.

Prop : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Si G est un sous-espace vectoriel de E alors $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.
Si H est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Prop : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Si V est un sous-espace affine de E de direction G alors $f(V)$ est un sous-espace affine de F de direction $f(G)$.
Si W est un sous-espace vectoriel de F de direction H alors $f^{-1}(W)$ est soit vide, soit égale à un sous-espace affine de E de direction $f^{-1}(H)$.

Prop : Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et A partie de E, $f(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(f(A))$.

c) image et noyau

Déf : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle noyau et image de l'application linéaire f les ensembles $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ et $\text{Im} f = f(E)$. Ce sont des sous-espaces vectoriels de respectivement E et F.

Prop : $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est injective ssi $\ker f = \{0\}$ et surjective ssi $\text{Im} f = F$.

Prop : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Si $f^2 = f$ alors $F = \text{Im} f = \ker(f - \text{Id})$ et $G = \ker f$ sont supplémentaires dans E et f est la projection sur F parallèlement à G.
Si $f^2 = \text{Id}$ alors $F = \ker(f - \text{Id})$ et $G = \ker(f + \text{Id})$ sont supplémentaires dans E et f est la symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G.

4°) Application multilinéaire

Déf : Une application $b : E \times F \to G$ est dite bilinéaire ssi
(1) $\forall y \in F$, l'application $x \mapsto b(x,y)$ est linéaire,
(2) $\forall x \in E$, l'application $y \mapsto b(x,y)$ est linéaire.

Déf : Soit $E_1, \ldots, E_n$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $m : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ est dite multilinéaire ssi : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall (x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times \hat{E}_i \times \cdots \times E_n$, $x_i \mapsto f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ est linéaire de E_i vers F.

5°) Algèbre

Déf : On appelle $\mathbb{K}$-algèbre tout ensemble E muni de deux lois de composition interne $+, \times : E \times E \to E$ et d'une loi externe : $. : \mathbb{K} \times E \to E$ vérifiant :
(1) $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
(2) $(E, +, \times)$ est un anneau,
(3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$, $(\lambda.x)y = \lambda.(xy) = x(\lambda.y)$.

Déf : On appelle sous-algèbre d'une $\mathbb{K}$-algèbre E toute partie F de E vérifiant :
(1) $1_E \in F$,
(2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \lambda x + \mu y \in F$ et $xy \in F$.

Théorème :
Une sous-algèbre est une $\mathbb{K}$-algèbre pour les lois induites.

Déf : Etant donné deux $\mathbb{K}$-algèbres E et F, on appelle morphisme d'algèbre de E vers F toute application $f : E \to F$ vérifiant : $f(1_E) = 1_F$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$. On parle aussi d'isomorphisme, endomorphisme et d'automorphisme d'algèbres.

II. Base d'un espace vectoriel

I désigne un ensemble, éventuellement infini.
E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1°) Famille à support fini

Déf : On note E^I l'ensemble des familles $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de E indexées sur I.

Prop : E^I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Déf : Une famille $(a_i)_{i\in I} \in E^I$ est dite à support fini ssi il n'existe qu'un nombre fini d'indices $i \in I$ tels que $a_i \neq 0$. On note $E^{(I)}$ l'ensemble de ces familles.

Prop : $E^{(I)}$ est un sous-espace vectoriel de E^I.

2°) Combinaison linéaire

Déf : On appelle combinaison linéaire des vecteurs d'une famille finie $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E tout vecteur de E pouvant s'écrire $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ avec $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$.

Déf : On appelle combinaison linéaire des vecteurs d'une famille infinie $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E tout vecteur de E pouvant s'écrire $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ avec $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$.

Prop : Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i)$.

Théorème :

Si A est une partie de E alors $\mathrm{Vect}\, A$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A.

3°) Famille génératrice

Déf : Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite génératrice ssi tout vecteur de E est combinaison linéaire de cette famille.

Prop : L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est une famille génératrice.

4°) Famille libre

Déf : Une famille finie $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite libre ssi $\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I, \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$.

Sinon la famille est dite liée et toute relation de la forme $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$ avec des λ_i non tous nuls est appelée relation linéaire sur la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Déf : Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite libre ssi pour toute $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ on a l'implication : $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$.

Sinon la famille est dite liée.

Prop : L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.

5°) Base

Déf : On appelle base de E toute famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E à la fois libre et génératrice.

Théorème :

Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E alors pour tout vecteur $x \in E$ il existe une unique famille $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que : $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$.

Déf : Avec les notations ci-dessus, la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est appelée famille des composantes (ou coordonnées) de x dans la base $(e_i)_{i\in I}$.

Théorème :

Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F alors il existe une unique application linéaire u de E vers F vérifiant $u(e_i)=f_i$ pour tout $i\in I$.

Prop : Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$ et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E.

u est injective $\Leftrightarrow$ $(u(e_i))_{i\in I}$ est libre.

u est surjective $\Leftrightarrow$ $(u(e_i))_{i\in I}$ est génératrice.

u est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ $(u(e_i))_{i\in I}$ est une base.

6°) Exemple : Algèbre des fonctions polynomiales en n variables

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Ici $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Déf : On appelle fonction monôme (unitaire) sur $\mathbb{K}^n$ toute application de $\mathbb{K}^n$ vers $\mathbb{K}$ de la forme : $(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$. La somme $\alpha_1+\dots+\alpha_n$ est appelée degré de ce monôme

Déf : On appelle fonction polynomiale sur $\mathbb{K}^n$ toute combinaison linéaire de fonction monôme sur $\mathbb{K}^n$. On note $\mathcal{P}(\mathbb{K}^n)$ l'ensemble de ces fonctions.

Prop : $\mathcal{P}(\mathbb{K}^n)$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{F}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K})$ (on parle alors de sous-algèbre).

Par suite l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbb{K}^n$ est une algèbre pour les lois usuelles.

Théorème :

La famille des fonctions monômes $(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$ avec $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$ est une base de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{P}(\mathbb{K}^n)$. On l'appelle base canonique de $\mathcal{P}(\mathbb{K}^n)$.

Cor : La description d'une fonction polynomiale sur $\mathbb{K}^n$ comme somme de monôme est unique.

Déf : On appelle degré d'une fonction polynomiale p non nulle sur $\mathbb{K}^n$ le plus haut degré des monômes intervenant dans l'écriture de p avec un coefficient non nul. On le note $\deg p$ et convient que $\deg 0=-\infty$.

Prop : Pour des fonctions polynomiales P et Q sur $\mathbb{K}^n$:

$\deg(P+Q)\leq\max(\deg P,\deg Q)$ et $\deg PQ=\deg P+\deg Q$.

III. Dimension et codimension

1°) Dimension

Déf : On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie ssi il possède une famille génératrice finie. Comme vu en sup, un tel espace possède une base formée d'un nombre fini de vecteurs et toute base est formée du même nombre de vecteurs appelé dimension de E et noté $\dim E$. De plus les familles libres ont moins de $\dim E$ vecteurs alors que les familles génératrices en ont plus.

Prop : Deux espaces vectoriels isomorphes ont même dimension.

Prop : Si $E_1,\dots,E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies alors $E_1\times\dots\times E_n$ est de dimension finie et $\dim E_1\times\dots\times E_n=\dim E_1+\dots+\dim E_n$.

2°) Construction de bases en dimension finie

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Toute famille libre de vecteurs de E peut être complétée en une base de E à l'aide de vecteurs bien choisis dans une famille génératrice.

Prop : Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(e_i)_{i\in I}$ une famille de $\dim E$ vecteurs de E alors on a équivalence entre :

(i) $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base,

(ii) $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre,

(iii) $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est génératrice.

3°) Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème :

Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie est lui-même de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$ avec égalité ssi $F = E$.

Déf : Toute base de E obtenue en complétant une base de F est dite adaptée à F.

Théorème :

Tout sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

Théorème :

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel alors $F+G$ et $F\cap G$ sont de dimensions finies et $\dim F+G = \dim F + \dim G - \dim F\cap G$.

Cor : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant $\dim E = \dim F + \dim G$. On a équivalence entre :

(i) $F \oplus G = E$,

(ii) $F\cap G = \{0\}$,

(iii) $F+G = E$.

4°) Codimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Théorème :

Pour $u\in\mathcal{L}(E,F)$, tout supplémentaire H de $\ker u$ dans E est isomorphisme à $\operatorname{Im} u$.

Cor : Deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel sont isomorphes.

Déf : Un sous-espace vectoriel F est dit de codimension finie dans E ssi il possède au moins un supplémentaire de dimension finie dans E. Tous les supplémentaires de F dans E ont alors la même dimension appelée codimension de F dans E et notée $\operatorname{codim} F$.

Prop : Si E est de dimension finie alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et on a la relation : $\dim F + \operatorname{codim} F = \dim E$.

5°) Rang d'une application linéaire

Déf : On appelle rang d'une application linéaire u, noté $\operatorname{rg}(u)$ la dimension l'image de u. Ainsi $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u$.

Prop : Si E est de dimension finie alors u est de rang fini et $\operatorname{rg} u \leq \dim E$ avec égalité ssi u est injective.

Si F est de dimension finie alors u est de rang fini et $\operatorname{rg} v \leq \dim F$ avec égalité ssi v est surjective.

Théorème du rang :

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Si $u\in\mathcal{L}(E,F)$ est de rang finie alors $\ker u$ est de codimension finie et $\operatorname{rg} u = \operatorname{codim}\ker u$.

Cor : Lorsque E est de dimension finie on obtient la relation $\operatorname{rg} u + \dim\ker u = \dim E$.

Théorème d'isomorphisme :

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies vérifiant $\dim E = \dim F$.

Pour tout $u\in\mathcal{L}(E,F)$, on a équivalence entre :

(i) u est un isomorphisme,

(ii) u est injective,

(iii) u est surjective,

(iv) $\operatorname{rg} u = \dim E = \dim F$,

(v) $\exists v\in\mathcal{L}(F,E), v\circ u = \mathrm{Id}_E$,

(vi) $\exists w\in\mathcal{L}(F,E), u\circ w = \mathrm{Id}_F$.

De plus si tel est le cas $u^{-1} = v = w$.

6°) Hyperplan et forme linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Déf : On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel F de E de codimension finie égale à 1.

Théorème :

Le noyau d'une forme linéaire non nulle φ sur E est un hyperplan H et tout hyperplan est noyau d'une certaine forme linéaire non nulle.

Déf : Pour φ forme linéaire non nulle, l'équation $\varphi(x)=0$ est appelée équation définissant l'hyperplan $H=\ker\varphi$.

Prop : Si φ,ψ sont deux formes linéaires non nulles telles que $\ker\varphi=\ker\psi$ alors $\exists\lambda\in\mathbb{K}^*$ tel que $\psi=\lambda\varphi$.

7°) Application : interpolation de Lagrange

Soit $a_1,\dots,a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.

Prop : L'application $\varphi:\mathbb{K}_{n-1}[X]\to\mathbb{K}^n$ définie par $\varphi(P)=(P(a_1),\dots,P(a_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Déf : Les polynômes $(L_0,\dots,L_n)$ où $L_k=\prod_{k\neq i}\dfrac{X-a_i}{a_k-a_i}$ sont appelés polynômes interpolateurs de Lagrange associés à la famille $(a_1,\dots,a_n)$.

Prop : Soit $(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{K}^n$. Il existe un unique polynôme $P\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, on ait $P(a_i)=b_i$ c'est $P=b_1L_1+\cdots+b_nL_n$.

Prop : Soit $(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{K}^n$. Les polynômes $P\in\mathbb{K}[X]$ tels que pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, on ait $P(a_i)=b_i$ sont les $P=b_1L_1+\cdots+b_nL_n+(X-a_1)\dots(X-a_n)Q$ avec $Q\in\mathbb{K}[X]$.

IV. Dualité en dimension finie

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1°) Base duale

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Pour tout $x\in E$, on peut écrire de manière unique $x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$.
Posons, pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, $\varphi_i(x)=x_i$. On définit ainsi des applications $\varphi_i:E\to\mathbb{K}$ qui sont clairement linéaires.

Déf : Les formes linéaires $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ sont appelées formes linéaires coordonnées associées à la base B.
Il est d'usage de noter e_i^* au lieu de φ_i.

Prop : $\forall i,j\in\{1,\dots,n\}$, $e_i^*(e_j)=\delta_{i,j}$ (relations d'orthogonalité de Kronecker)

Théorème :

La famille $\mathcal{B}^*=(e_1^*,\dots,e_n^*)$ est une base de E^*.
On l'appelle base duale de la base $\mathcal{B}$.

Cor : $\forall\varphi\in E^*,\exists!(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^n,\varphi=a_1e_1^*+\cdots+a_ne_n^*$
Ainsi en convenant de noter $x_1,\dots,x_n$ les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$, on a $\varphi(x)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$.

2°) Base antéduale

lemme : $\forall x\in E,x\neq0\Rightarrow\exists\varphi\in E^*,\varphi(x)=1$.

Théorème :

Si $\mathcal{L}=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ une base de E^*, il existe une unique base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L}=\mathcal{B}^*$.
La base $\mathcal{B}$ est appelée base antéduale (ou préduale) de $\mathcal{L}$.

3°) Sous-espace vectoriel défini par équation

Prop : Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension p alors l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur F est un sous-espace vectoriel de E^* de dimension $q = n - p$.

Prop : Si $L = (\varphi_1,\ldots,\varphi_q)$ est une famille libre de formes linéaires sur E alors l'ensemble F des vecteurs annulant tous les φ_i forme un sous-espace vectoriel de dimension $p = n - q$.

Théorème :

Les sous-espaces vectoriels de dimension p de E correspondent aux espaces solutions de systèmes de la forme $\begin{cases}\varphi_1(x) = 0\\ \ldots\\ \varphi_q(x) = 0\end{cases}$ avec $q = n - p$ et $\varphi_1,\ldots,\varphi_q$ des formes linéaires indépendantes.

V. Somme directe de sous-espaces vectoriels

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. Par commodité, nous indexons cette famille avec $i \in \{1,\ldots,n\}$ mais les notions qui suivent s'étendent en des termes semblables à $i \in I$ avec I ensemble fini.

1°) Somme de plusieurs sous-espaces vectoriels

Prop : L'ensemble F formé des vecteurs $x_1 + \cdots + x_n$ avec $(x_1,\ldots,x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

Déf : On alors dit que F est le sous-espace vectoriel somme des sous-espaces vectoriels $F_1,\ldots,F_n$ et on note $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$.

Prop : $\sum_{i=1}^{n} F_i = \text{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)$.

Prop : Si tous les F_i sont de dimensions finies alors $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est de dimension finie et $\dim \sum_{i=1}^{n} F_i \leq \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$ ..

2°) Somme directe de sous-espaces vectoriels

Déf : On dit que la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe lorsque :

$\forall x \in \sum_{i=1}^{n} F_i, \exists!(x_1,\ldots,x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, x = x_1 + \cdots + x_n$.

Cette somme est alors notée $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ pour souligner l'unicité de la décomposition en somme de vecteurs de $F_1,\ldots,F_n$.

Théorème :

On a équivalence entre :

(i) $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe,

(ii) $\forall (x_1,\ldots,x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, x_1 + \cdots + x_n = 0 \Rightarrow x_1 = \ldots = x_n = 0$,

(iii) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}, F_i \cap \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} F_j = \{0\}$.

Théorème :

Si tous les sous-espaces vectoriels F_i sont de dimensions finies, on a équivalence entre :

(i) $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe,

(ii) $\dim \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

3°) Décomposition en somme directe

a) définition

Déf : On appelle décomposition en somme directe de l'espace E toute écriture $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Théorème :

Si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ alors $\forall x \in E, \exists !(x_1,\ldots,x_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n, x = x_1 + \cdots + x_n$.

Théorème :

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et si $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$ alors on a équivalence entre :

(i) $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$,

(ii) $E = \sum_{i=1}^{n} F_i$,

(iii) $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe.

Déf : Une telle base est dite adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

b) projecteurs associés

On suppose $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$. Pour tout $x \in E$, il existe un unique $(x_1,\ldots,x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_n$.
Pour $i \in \{1,\ldots,n\}$, on pose $p_i(x) = x_i$ ce qui définit $p_i : E \to E$.

Déf : Les $p_1,\ldots,p_n$ sont appelés projecteurs associés à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$

Prop : $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, p_i est la projection vectorielle sur F_i parallèlement à $\sum_{j \neq i} F_j$.

$\forall i, j \in \{1,\ldots,n\}$, $i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0$.

$\mathrm{Id}_E = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

c) décomposition d'une application linéaire

Théorème :

On suppose $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Si pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, u_i une application linéaire de F_i vers un certain $\mathbb{K}$ -espace vectoriel F alors il existe une unique application linéaire u de E vers F telle que pour tout $i \in I$, $u_{\restriction F_i} = u_i$.

Déf : L'application linéaire u est appelée somme directe des applications $u_1,\ldots,u_n$, on note, parfois $u = \bigoplus_{i=1}^{n} u_i$.